

# О СВОЙСТВАХ ПРЕДЕЛЬНОСТИ И $\Gamma$ -ПРЕДЕЛЬНОСТИ КЛАССОВ ВОЗМУЩЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Е.К. Макаров

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
jcm@im.bas-net.by

Рассмотрим возмущенную линейную дифференциальную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с кусочно-непрерывными ограниченными матрицами коэффициентов  $A$  и возмущений  $Q$ . Матрицу Коши системы (1) обозначим через  $X_{A+Q}$ , а для ее старшего показателя системы будем использовать обозначение  $\lambda_n(A+Q)$ .

Задача отыскания величин  $\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}\}$  для различных классов возмущений  $\mathfrak{M}$  — одна из важных задач теории характеристических показателей Ляпунова [1, с. 157; 2, с. 46]. Во многих случаях для величины  $\Lambda(\mathfrak{M})$  может быть построен алгоритм, аналогичный алгоритму вычисления сигма-показателя [2, с. 214]. В некоторых других случаях имеют место формулы, сходные с формулами для вычисления центрального [1, с. 99] и экспоненциального [2, с. 57] показателя.

В работе [3] для совокупности  $\mathfrak{M}_0[\theta]$  всех возмущений, удовлетворяющих оценке  $\|Q(t)\| \leq N_Q e^{-\sigma\theta(t)}$ , в которой  $N_Q \geq 0$ ,  $\sigma > 0$  — числа, зависящие от  $Q$ , а  $\theta : [0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  — фиксированная монотонно возрастающая к  $+\infty$  кусочно-непрерывная функция такая, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1}\theta(t) < +\infty$ , сообщается о доказательстве равенства

$$\Lambda(\mathfrak{M}_0[\theta]) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k(\delta)} \sum_{j=0}^k \ln \|X_A(T_{j+1}(\delta), T_j(\delta))\|, \quad (2)$$

где последовательность моментов времени  $T_j(\delta)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\delta > 0$ , определена рекуррентной формулой  $T_{j+1}(\delta) = T_j(\delta) + \delta\theta(T_j(\delta))$ ,  $T_0(\delta) \geq 0$ . Классы возмущений  $\mathfrak{M}$ , для которых величина  $\Lambda(\mathfrak{M})$  имеет представление вида (2), в [3] названы предельными.

Для произвольного множества  $S$  и всякого  $n \in \mathbb{N}$  через  $S^{n \times n}$  обозначим множество всех  $n \times n$ -матриц с элементами из  $S$ . Через  $\text{KC}_n(\mathbb{R}^+)$  обозначим линейное пространство всех ограниченных кусочно-непрерывных матриц-функций, определенных при  $t \geq 0$  и принимающих значения в  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Строго положительной будем называть такую функцию  $\gamma \in \text{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ , что  $\gamma(t) > 0$  при всех  $t \geq 0$  и все ее односторонние пределы в точках ее разрыва также положительны.

Следуя [4], под одномерным классом малости будем понимать произвольное собственное линейное подпространство  $\mathfrak{s} \subset \text{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ , содержащее хотя бы одну строго положительную функцию и удовлетворяющее условию: если  $\beta \in \mathfrak{s}$ , то и все функции  $\varphi \in \text{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ , такие что  $|\varphi(t)| \leq |\beta(t)|$  при всех  $t \geq 0$ , принадлежат  $\mathfrak{s}$ . При каждом  $n \in \mathbb{N}$  под классом малости размерности  $n \times n$ , соответствующим одномерному классу  $\mathfrak{s}$ , будем понимать множество матриц  $\mathfrak{s}^{n \times n}$ . Системой образующих для одномерного класса  $\mathfrak{s}$  будем называть подмножество  $\mathcal{K} \subset \mathfrak{s}$ , состоящее из строго положительных функций и позволяющее для любого  $\beta \in \mathfrak{s}$  найти  $\varphi \in \mathcal{K}$  такое, что  $|\beta| \leq C\varphi$  при некотором  $C > 0$ , зависящем от  $\varphi$  и  $\beta$ .

Через  $\mathbb{T}_0$  обозначим множество последовательностей моментов времени  $t_k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , монотонно возрастающих к  $+\infty$  и удовлетворяющих условию  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k^{-1}t_{k+1} = 1$

медленного роста, а также условию  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (t_{k+1} - t_k) = +\infty$ . Для любых  $\beta \in \text{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ ,  $N \geq 0$  и  $\tau \in \mathbb{T}_0$  положим

$$\Omega(A, \tau) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_{k+1}} \sum_{i=0}^k \ln \|X_A(t_{i+1}, t_i)\|, \quad \Delta_N(\beta, \tau) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_{t_0}^{t_k} K_N^\tau(s) \beta(s) ds,$$

где  $t_k = \tau(k)$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $K_N^\tau(s) = e^{N(s-t_k)}$  при  $s \in [t_k, t_{k+1}]$ ,  $K_N^\tau(s) = 0$  при  $s \leq t_0$ . Если же функция  $\beta \in \text{KC}_1(\mathbb{R}^+)$  строго положительна, то дополнительно введем обозначение

$$\gamma(\beta, \tau) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_{k+1}} \sum_{i=0}^k \ln \frac{2}{\sin \varphi_i}, \quad \varphi_i = \min \left\{ \frac{\pi}{2}, e^{-2N_A} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \beta(s) ds \right\};$$

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{M} = \mathfrak{s}^{n \times n}$  — некоторый класс малости возмущений и  $\mathcal{K}$  — система образующих соответствующего ему одномерного класса  $\mathfrak{s}$ . Если существует множество  $\Gamma \subset \mathbb{T}_0$  такое, что для любой последовательности  $\tau \in \Gamma$  выполнено равенство  $\inf_{\beta \in \mathcal{K}} \gamma(\beta, \tau) = 0$  и для всякого  $\beta \in \mathcal{K}$  при любом  $M > 0$  найдется последовательность  $\tau \in \Gamma$ , удовлетворяющая условию  $\Delta_M(\beta, \tau) = 0$ , то  $\Lambda(\mathfrak{M}) = \sup_{\beta \in \mathcal{K}} \sup_{M > 0} \inf_{\tau \in \mathcal{R}_M^\beta} \Omega(A, \tau) = \sup_{\tau \in \Gamma} \Omega(A, \tau)$ , где  $\mathcal{R}_M^\beta = \{\tau \in \Gamma : \Delta_M(\beta, \tau) = 0\}$ .

**Определение 1.** Произвольный класс малости  $\mathfrak{M}$  будем называть  $\Gamma$ -предельным, если существует множество  $\Gamma \subset \mathbb{T}$  такое, что равенство

$$\Lambda(\mathfrak{M}) = \sup_{\tau \in \Gamma} \Omega(A, \tau)$$

справедливо для любой системы (1).

**Определение 2.** Одномерный класс малости  $\mathfrak{s}$  будем называть радикальным, если вместе с каждым своим элементом  $\beta$  множество  $\mathfrak{s}$  содержит и все его степени  $\beta^\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ .

**Теорема 2.** Если одномерный класс малости  $\mathfrak{s}$  является радикальным, состоит из функций, стремящихся к нулю на бесконечности, и имеет систему образующих  $\mathcal{K}$ , каждый элемент  $\beta$  которой является непрерывной функцией, имеющей точный нулевой показатель Ляпунова и удовлетворяющей при некотором  $C_\beta > 0$  и всех достаточно больших  $t$  условию

$$\int_{t-1}^t \ln \beta(s) ds \geq C_\beta \ln \beta(t),$$

то при любом  $n \in \mathbb{N}$  класс малости  $\mathfrak{M} = \mathfrak{s}^{n \times n}$  является  $\Gamma$ -предельным.

Аналогичные теоремы справедливы и для классов возмущений бесконечно малых в среднем с положительным весом.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, договор № Ф14Р-011.

### Литература

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*. М.: Наука, 1966.
2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова*. Мн.: БГУ, 2006.
3. Барабанов Е. А. *О крайних показателях Ляпунова линейных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях* // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 357.
4. Макаров Е. К. *Аксиоматическое представление классов малости возмущений коэффициентов линейных дифференциальных систем* // Вестн. Удмуртского гос. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 1. С. 46–57.